

V

FORMULE HARMONIQUE DE LA MARÉE

1 • Introduction

La formule harmonique de la marée découle directement des deux principes de base de la théorie dynamique énoncée par Laplace : principe des oscillations forcées et principe de la superposition des petits mouvements. Elle repose sur un développement de la fonction du potentiel générateur, en une somme de termes rigoureusement périodiques et de fréquences discrètes et bien définies, représentatives d'une somme de distributions de Dirac. Cette distribution de fréquences se traduit par un spectre dit de « raies » par opposition à un spectre « continu » (fonction continue de la fréquence). Laplace avait déjà eu l'idée d'exprimer les potentiels de chaque astre, en fonctions sinusoïdales avec des arguments variant linéairement avec le temps. Chaque terme du développement pouvait être interprété comme le potentiel d'un « astre fictif », animé d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan de l'équateur, générateur d'une onde de marée de même période mais avec une amplitude et une phase, toutes deux fonctions du lieu considéré et de la vitesse angulaire de cet astre fictif sur l'équateur céleste. En faisant l'hypothèse d'une réponse linéaire de l'océan à la période de révolution de l'astre pour les composantes diurnes d'une part et semi-diurnes d'autre part, c'est-à-dire dans des domaines suffisamment étroits en fréquences, Laplace a pu éviter le recours au développement harmonique complet. Ainsi, il a pu exprimer la somme des ondes constituant la marée sous la forme d'un développement fini, limité à un nombre restreint de termes. Il a également montré la manière d'effectuer le développement purement harmonique du

potentiel, prenant en compte également les principales perturbations de l'orbite lunaire. Il en a déduit l'expression correspondante de chaque onde, indépendamment de toute hypothèse sur l'amplitude et la phase. C'est ce travail de Laplace que Kelvin en 1867 puis Darwin en 1883 ont poursuivi sous le nom de développement harmonique du potentiel.

Cependant, la théorie de la Lune disponible à cette époque n'a pas permis pas à Darwin de proposer un développement complet du potentiel générateur. Les irrégularités induites par les mouvements des nœuds lunaires, considérées comme des perturbations, nécessitaient la prise en compte de facteurs correctifs, appelés facteurs nodaux.

Le développement du potentiel fourni par Doodson en 1921, mieux adapté au calcul automatique, est resté une référence pendant plus d'un demi-siècle, bien que calculé sur des constantes astronomiques de 1900. Il ne diffère pas sensiblement des développements proposés par de nombreux auteurs dans les années 1970 à partir de nouvelles constantes astronomiques et avec l'aide des ordinateurs.

2 • Le développement du potentiel de Darwin

Du fait du caractère de l'orbite lunaire très perturbée par l'action du Soleil, le développement du potentiel de marée proposé en 1883 par Darwin n'est pas strictement harmonique et se présente sous la forme suivante :

$$U(t) = \sum_i f_i(t) A_i \cos[V_{i,0} + q_i t + u_i(t)] \quad (5.1)$$

avec :

t : temps civil du lieu,

i : numéro de la composante considérée,

A_i et q_i : amplitude et vitesse angulaire constantes de la composante i ,

$V_{i,0}$: argument correspondant à l'instant origine ($t = 0$),

$f_i(t)$ et $u_i(t)$: « facteurs nodaux » de la composante i .

Les facteurs nodaux sont des fonctions dépendant du temps (facteur d'amplitude $f_i(t)$ et le déphasage $u_i(t)$) à prendre en compte pour corriger les variations lentes de la composante i . Ces variations sont induites par l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur l'équateur (voir annexe A : « La Lune et ses mouvements caractéristiques »). Cette inclinaison, variant de 28°, 8 à 18°, 1, peut s'exprimer en fonction de la longitude écliptique du nœud ascendant

(période de 18,6 ans). C'est pour cette raison que ces termes sont appelés facteurs nodaux. Signalons aussi que l'amplitude d'une composante du potentiel est aussi appelée « coefficient ». Cette dénomination résulte du fait que c'est habituellement la valeur relative de l'amplitude qui constitue la donnée utile.

Bien que ce développement ne soit pas purement harmonique, il s'est révélé en réalité parfaitement adapté aux moyens de calculs disponibles avant l'avènement des ordinateurs. Darwin calcule les coefficients constants A_i avec une formule très simplifiée de l'orbite lunaire. Il évite ainsi le calcul d'un bien plus grand nombre de fonctions trigonométriques nécessaires à un développement complet. Les corrections introduites par ces facteurs nodaux sont faibles et lentement variables. Par ailleurs, elles sont disponibles sous formes de tables aisément utilisables avec les moyens de calcul de l'époque. Tout en conservant une précision acceptable, il est possible de considérer que la plupart des facteurs nodaux sont constants durant une année. Le recours à ces corrections systématiques, de valeurs constantes pour chaque composante i sur un tel laps de temps, est relativement aisé et cette méthode a été largement utilisée dans les applications courantes. Cette façon de procéder a probablement contribué à propager l'idée selon laquelle l'année est la durée de base des observations marégraphiques pour en effectuer l'analyse harmonique. Malgré les progrès des moyens de calcul, le développement du potentiel de la marée, établi par Darwin, est resté longtemps la référence, même après l'apparition du développement plus complet de Doodson en 1921. De nos jours, les moyens de calcul ne sont plus un obstacle à l'utilisation du développement du potentiel proposé par Doodson. Il n'en demeure pas moins que les travaux de Darwin ont marqué la marégraphie moderne. En effet, les principales composantes du potentiel, communes aux deux développements, sont désormais universellement désignées sous les appellations attribuées par Darwin. En outre, le recours aux facteurs nodaux reste encore très utile, en particulier pour les prédictions, car ils permettent, sans perte de précision sensible, de limiter la taille des fichiers de composantes harmoniques. Ainsi, la liste des composantes proposées par Darwin reste le plus souvent suffisante pour obtenir une prédiction de bonne qualité pour les besoins de la navigation. Les noms des principales composantes définies par Darwin sont fournis par les deux tableaux suivants (5.1a et 5.1b). Cependant, les coefficients sont ceux du développement de Doodson, peu différents de ceux qui ont été calculés par Darwin. En pratique, seule leur importance relative est à considérer. Il est notable que les ordres de grandeur des coefficients mettent en évidence une nette hiérarchie dans ces composantes.

Il convient d'apporter quelques commentaires sur certaines composantes

TABLEAU 5.1A — Les composantes du potentiel lunaire

Symbole	Nom de la composante	Vitesse angulaire degré/heure	Période jours ou heures	Coefficient $u \times 10^5$
	Terme constant	00,000 000 00		50 458
	<i>Longues périodes</i>		<i>Jours</i>	
<i>Mm</i>	mensuelle	00,544 374 68	27,554 551 21	8 253
<i>Msf</i>	variationnelle	01,015 895 76	14,765 294 42	1 367
<i>Mf</i>	bimensuelle	01,098 033 04	13,660 791 11	15 640
	<i>Diurnes</i>		<i>Heures</i>	
2Q ₁	elliptique 2 ^e ordre	12,854 286 23	28,006 222 48	952
Q ₁	Elliptique majeure	13,398 660 92	26,868 356 63	7 206
ρ ₁	évectionnelle	13,471 514 52	26,723 053 25	1 368
O ₁	lunaire principale	13,943 035 60	25,819 341 66	37 689
M ₁	Elliptique mineure	14,496 693 96	24,833 248 26	2 961
K ₁	déclinationnelle	15,041 068 64	23,934 469 59	36 232
J ₁	elliptique secondaire	15,585 443 32	23,098 476 73	2 959
OO ₁	lunaire 2 ^e ordre	16,139 101 68	22,306 074 22	1 615
	<i>Semi-diurnes</i>		<i>Heures</i>	
2N ₂	elliptique 2 ^e ordre	27,895 354 87	12,905 374 45	2 300
μ ₂	variationnelle	27,968 208 48	12,871 757 60	2 777
N ₂	elliptique majeure	28,439 729 56	12,658 348 21	17 391
NU ₂	évectionnelle majeure	28,512 583 16	12,626 004 38	3 302
M ₂	lunaire moyenne	28,984 104 24	12,420 601 20	90 812
λ ₂	évectionnelle mineure	29,455 625 32	12,221 774 13	669
L ₂	elliptique mineure	29,528 478 92	12,191 620 20	2 567
K ₂	déclinationnelle	30,082 137 28	11,967 234 80	7 852
	<i>Tiers-diurne</i>		<i>Heures</i>	
M ₃		43,476 156 36	8,280 400 80	1 188

particulières. Tout d’abord, les termes constants du potentiel n’interviennent évidemment pas dans la marée proprement dite. Les composantes LP (basses fréquences ou longues périodes) de la marée astronomique sont généralement très faibles car relevant de la théorie statique, et souvent masquées par

2. Le développement du potentiel de Darwin

TABLEAU 5.1B — Les composantes du potentiel solaire.

Symbole	Nom de la composante	Vitesse angulaire degré/heure	Période jours ou heures	Coefficient $u \times 10^5$
	Terme constant	00,000 000 00		23 411
	<i>Longues périodes</i>		<i>Jours</i>	
Sa	annuelle	00,041 068 64	365,242 189 66	$u < 10^{-5}$
Ssa	semi-annuelle <i>Diurnes</i>	00,082 137 28	182,621 094 83 <i>Heures</i>	7 245
P ₁	solaire principale	14,958 931 36	24,065 890 22	16 817
S ₁	radiationnelle	15,000 000 00	24,000 000 00	$u < 10^{-5}$
K ₁	déclinationnelle	15,041 068 64	23,934 469 59	16 124
	<i>Semi-Diurnes</i>		<i>Heures</i>	
T ₂	elliptique majeure	29,958 933 32	12,016 449 19	2 472
S ₂	Solaire moyenne	30,000 000 00	12,000 000 00	42 286
R ₂	elliptique mineure	30,041 066 68	11,983 595 78	437
K ₂	déclinationnelle	30,082 137 28	11,967 234 80	3 643

un « bruit » d'origine météorologique (action du vent et de la pression atmosphérique sur le niveau marin). Elles ne sont que difficilement détectables dans les observations du niveau marin. Seules les composantes Sa et Ssa, qui traduisent davantage les variations saisonnières de la marée « radiationnelle » (liée à l'action thermique du rayonnement solaire sur l'atmosphère et l'océan) peuvent généralement être mises en évidence. Les coefficients du potentiel, relatifs aux ondes Sa et S₁, sont inférieurs à 10⁻⁵. Ces deux éléments ne devraient pas figurer dans le tableau car il en existe d'autres qui ont des coefficients plus importants et qui ne sont pas cités. Cependant, elles ont été introduites ici pour prendre en compte les variations observées du niveau marin, respectivement aux fréquences annuelles et diurnes de la marée radiationnelle. La mise en évidence d'ondes de marée perturbées par les composantes radiationnelles permet en général une meilleure interprétation de l'action respective des deux astres. Les composantes K₁ et K₂, dites « ondes sidérales » car leur période est égale respectivement au jour sidéral et au demi-jour sidéral, sont présentes à la fois dans le potentiel lunaire et le potentiel solaire. Pour toutes les études les concernant, les coefficients à prendre en compte sont la somme des coefficients issus des deux origines.